Lineare Algebra II

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 9

MORITZ FLEISCHMANN

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Finde die Jordanschen Normalform und eine Jordanbasis über $\mathbb{C}$ für:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Bevor wir die Aufgabe selbst lösen wollen, besprechen wir den zweiten Teil des Algorithmus. Letzte Woche hatten wir bereits gezeigt, dass die Anzahl der Jordanblöcke der Dimension des Eigenraums entspricht; Diese Woche sehen wir, wie wir die jeweiligen Größen der Jordanblöcke und eine Jordanbasis bestimmen. Die Argumentation zeigt hoffentlich, wieso diese Aussagen gelten *sollten* und wieso der Algorithmus so funktioniert, wie er funktioniert, aber es ist dennoch kein formaler Beweis. Da der Text ziemlich lang ist: Die Begründung steht am Anfang, der reine Algorithmus steht in einem grünen Kasten, ein Beispiel im dritten Kasten und ein häufiger Fehler im roten Kasten. Danach kommt im grauen Kasten die Lösung der eigentlichen Aufgabe.

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit Darstellungsmatrix A der eine Jordansche Normalform (JNF) J besitzt. Wir betrachten die Situation zunächst aus Sicht von J. Die Eigenwerte seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit Jordanblöcken der Größe $n_1, \ldots, n_k$. Wir erinnern uns zuerst, dass wir den Raum V als direkte Summe der Unterräume $V_1, \ldots, V_k$ schreiben können, wobei jeder Unterraum einem Jordanblock entspricht. Das erlaubte es uns, die Gleichung

$$\dim\ker(J - \mathbb{1}_n\lambda_j) = \sum_{l=1}^{k} \dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)$$

aufzustellen. Da $\ker\left((J - \mathbb{1}_n\lambda_j)|_{V_l}\right) \subseteq V_l$ liegt und V_l ein $(J - \mathbb{1}_n\lambda_j)$-invarianter Unterraum ist, bleibt diese Zerlegung auch unter mehrfacher Anwendung von $J - \mathbb{1}_n\lambda_j$ gültig und wir erhalten

$$\dim\ker(J - \mathbb{1}_n\lambda_j)^2 = \sum_{l=1}^{k} \dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^2$$

das erlaubt es uns folgendes zu betrachten: Wir erinnern uns, dass die Dimension des Eigenraums zu einem Eigenwert λ_l die Anzahl der Jordanblöcke zu diesem Eigenraum angibt, da die Kerndimension jedes Jordanblocks genau Eins ist. Darauf aufbauend überlegen wir uns nun, wie wir aus den Dimensionen der höheren Haupträume bestimmen, welche Größen die weiteren Jordanblöcke haben. Wir betrachten den Block $J_{\lambda,m}$, der λ auf der Diagonalen hat, Einsen darüber und eine $m \times m$-Matrix ist. Als Spaltenmatrix geschrieben, gilt also:

$$J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda = (0|e_1|e_2|e_3|\ldots|e_{m-3}|e_{m-2}|e_{m-1})$$

Hier kann man auch erneut schön ablesen, dass die Dimension des Kerns 1 ist. Es gilt nun

$$(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^2 = (0|0|e_1|e_2|\ldots|e_{m-4}|e_{m-3}|e_{m-2})$$

und da wir nun $m-2$ linear unabhängige Vektoren als Spalten haben, ist die Dimension des Kerns 2. Man kann dies allgemein fortführen und erhält für ein $r < m$

$$(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^r = (0|\ldots|e_1|e_2|\ldots|e_{m-(r+2)}|e_{m-(r+1)}|e_{m-r})$$

das heißt wir haben $m-r$ linear unabhängige Vektoren als Spalten und damit hat der Kern eine Dimension von r. FÜr $r \geq m$ gilt dagegen:

$$(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^r = 0$$

und die Kerndimension ist m. Daraus folgt:

Zur Übersichtlichkeit sortieren wir unsere Jordanblöcke der Größe nach aufsteigend um. Es seien also die ersten k_1 Blöcke von Größe 1. Die nächsten k_2 Blöcke von Größe 2, etc. Um weitere Schreibarbeit zu ersparen, nehmen wir weiter an, dass alle Eigenwerte gleich sind, also $\lambda_j = \lambda_l$ für alle $j, l \in [k]$. Betrachten wir

$$\dim\ker(J - \lambda_j \mathbb{1}_n) = \sum_{l=1}^{k} \dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)$$

dann sehen wir, dass jeder Jordanblock zu der Summe einen Wert von 1 beiträgt, unabhängig von seiner Größe. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}
\dim\ker(J - \lambda_j \mathbb{1}_n)^2 &= \sum_{l=1}^{k} \dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^2 \\
&= \sum_{l=1}^{k_1} \underbrace{\dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^2}_{=1} + \sum_{l=k_1+1}^{k} \underbrace{\dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^2}_{=2} \\
&= k_1 \cdot 1 + (k - k_1) \cdot 2
\end{aligned}$$

das heißt jeder Jordanblock der Größe 1 trägt zu dieser Summe weiterhin einen Wert von 1 bei, während jeder Block der größer als 1 ist, einen Wert von 2 zur Summe beiträgt. Man kann das fortführen und erhält:

$$\begin{aligned}
\dim\ker(J-\lambda_j \mathbb{1}_n)^r &= \sum_{l=1}^{k} \dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^r \\
&= \sum_{l=1}^{k_1} \underbrace{\dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^r}_{=1} + \ldots + \\
&+ \sum_{l=k_{r-2}+1}^{k_{r-1}} \underbrace{\dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^r}_{=r-1} + \sum_{l=k_{r-1}+1}^{k} \underbrace{\dim\ker(J_{\lambda_l,n_l} - \mathbb{1}_{n_l}\lambda_j)^r}_{=r} \\
&= k_1 \cdot 1 + \ldots + k_{r-1} \cdot (r-1) + (k - (k_1 + \ldots + k_{r-1})) \cdot r
\end{aligned}$$

es trägt also jeder Block der Größe $m < r$ einen Wert von m zur Summe der Dimensionen bei, während alle Blöcke der Größe $m \geq r$ einen Wert von r zur Summe der Dimensionen beitragen. Wollen wir wissen, wie viele Blöcke eine bestimmte Größe z.B. s haben, können wir also überprüfen, wie viele Blöcke genau s zur Dimension des Kerns von $(J-\lambda_j)^r$ für $r \geq s$ beitragen. Mithilfe der obigen Summen können wir das rekursiv bestimmen: Sei t die maximale Größe eines Blocks, dann gilt:

$$|\{\text{Blöcke der Größe } t\}| = \underbrace{\dim\ker(J-\mathbb{1}_n\lambda_j)^t}_{=k} - \dim\ker(J-\mathbb{1}_n\lambda_j)^{t-1}$$

damit wir jeden Block der Größe t genau einmal und jeden kleineren Block gar nicht zählen. Für die weiteren Blöcke ergibt sich ähnlich:

$$|\{\text{Blöcke der Größe } s\}| = \dim\ker(J-\mathbb{1}_n\lambda_j)^s - \dim\ker(J-\mathbb{1}_n\lambda_j)^{s-1} - |\{\text{Blöcke der Größe } > s\}|$$

wobei wir den letzten Term abziehen müssen, da jeder Block der Größe $r > s$ natürlich auch zum Term $\dim\ker(J-\mathbb{1}_n\lambda_j)^s$ beiträgt. Auf diese Art und Weise können wir rekursiv die Anzahl aller Blöcke bestimmen.

Haben wir es nicht mit einer Matrix zu tun, die nur einen Eigenwert, sondern mehrere Eigenwerte hat, sind der Vorgang und die Argumentation im Prinzip gleich, wir achten nur auf folgendes: Ein Jordanblock zu einem Eigenwert λ_j trägt nur etwas zur Summe der Kerndimensionen bezüglich λ_l bei, wenn $\lambda_j = \lambda_l$ gilt. Für diese Rechnung sind also alle Blöcke zu anderen Eigenwerten irrelevant. Weiter gilt, dass nun im Allgemeinen die Dimension von $(\ker(J-\lambda_j\mathbb{1}_n))^t$ mit t der Größe des größten Jordanblocks, nicht k ist, sondern α_j, wobei hiermit die algebraische Vielfachheit von λ_j gemeint ist.

Erneut gelten diese Aussagen auch, wenn wir in der Basis sind, bezüglich derer A eine Darstellungsmatrix ist. Wir können also auch, wenn wir nur A kennen, die Größen aller Blöcke bestimmen. Nehmen wir nun an, dass wir die Größen aller Blöcke bestimmt haben, dann gilt es als nächstes eine Jordanbasis zu bestimmen. Dazu überlegen wir uns, dass es bei einer direkten Summe $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ ausreichend ist, wenn wir für jeden der Teilräume V_j eine Basis B_j finden und deren Elemente mit Nullen auffüllen, um Vektoren aus V zu erhalten. Wir betrachten nun also lediglich einen Block:

Sei $J_{\lambda,m}$ ein Jordanblock und sei $B_j = \{u_1, \ldots, u_m\}$ die dazugehörige Jordanbasis des entsprechenden direkten Summanden V_j von V. Mit Jordanbasis meinen wir, dass $J_{\lambda,m}$ in dieser Basis ausgedrückt, genau die bekannte Form hat. In dieser Basis sind die Vektoren von der Form

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, u_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also gilt

$$(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)u_1 = \left(0|u_1|\dots|u_{m-1}|u_m\right) u_1 = 0$$

das heißt wir wissen $u_1 \in \ker(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)$. Weiter gilt:

$$(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)u_2 = \left(0|u_1|\dots|u_{m-1}|u_m\right) u_2 = u_1$$

also gilt $u_2 \in \ker(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^2 \setminus \ker(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)$ und allgemein:

$$u_r \in \ker(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^r \setminus \ker(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^{r-1}$$

Das heißt, wenn wir eine Jordanbasis bestimmen wollen, können wir zuerst einen Vektor aus $\ker(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^m \setminus \ker(J_{\lambda,m} - \mathbb{1}_m\lambda)^{m-1}$ wählen, der im gewünschten Unterraum liegt und dann sukzessiv die anderen Vektoren bestimmen.
Üblicherweise werden wir es mit verschiedenen Jordanblöcken zum gleichen Eigenwert zu tun haben, also müssen wir die Vektoren so wählen, dass sie im korrekten Unterraum liegen. Das bedeutet, dass wir sie so wählen müssen, dass sie linear unabhängig von allen Vektoren aus einem niedergradigerem Kern und allen Vektoren aus anderen Summanden sind. Um das zu erreichen beginnen wir mit dem größten Block und arbeiten uns von dort Stück für Stück nach unten.

Wir fassen den Algorithmus noch einmal zusammen:

Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit Darstellungsmatrix A der eine JNF J besitzt.

1. Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom χ_A und alle Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit ihren algebraischen Vielfachheiten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

2. Wir bestimmen nun die Größen der einzelnen Jordanblöcke. Dabei gehen wir für jeden Eigenwert λ_j wie folgt *separat* vor:

   (a) Wir bestimmen zuerst die Dimensionen der Kerne. Das heißt wir berechnen

   $$\dim\ker(A - \mathbb{1}_n\lambda_j), \dim\ker(A - \mathbb{1}_n\lambda_j)^2, \dots, \dim\ker(A - \mathbb{1}_n\lambda_j)^{k_j}$$

   wobei sich k_j dadurch ergibt, dass $\dim\ker(A-\mathbb{1}_n\lambda_j)^{k_j} = \alpha_j$, aber $\dim\ker(A-\mathbb{1}_n\lambda_j)^{k_j-1} \neq \alpha_j$. Wir haben nun die Größe des größten Blocks (nämlich k_j) gefunden.
   Wenn wir nur die JNF der Matrix bestimmen wollen, reicht es aus die Dimensionen der Kerne zu bestimmen. Wollen wir auch eine Jordanbasis, dann bietet es sich an, in diesem Schritt auch noch die Kerne selbst zu bestimmen.

   (b) Wir bestimmen nun zu jeder möglichen Größe die Anzahl der Jordanblöcke. Das geht mit obiger Formel. Es gilt also für $1 < s < k_j$, dass:

   $$\begin{aligned} |\{\text{Blöcke der Größe } k_j\}| &= \alpha_j - \dim\ker(A - \mathbb{1}_n\lambda_j)^{k_j-1} \\ |\{\text{Blöcke der Größe } s\}| &= \dim\ker(A - \mathbb{1}_n\lambda_j)^s - \dim\ker(A - \mathbb{1}_n\lambda_j)^{s-1} - |\{\text{Blöcke der Größe } > s\}| \\ |\{\text{Blöcke der Größe } 1\}| &= \dim\ker(A - \mathbb{1}_n\lambda_j) - |\{\text{Blöcke der Größe } > 1\}| \end{aligned}$$

   Nach Bestimmung aller Blöcke zu allen Eigenwerten, können wir nun die JNF aufstellen indem wir die Blöcke in gewünschter Reihenfolge anordnen. Wollen wir nur eine JNF bestimmen, sind wir fertig. Ansonsten kommt noch der nächste Schritt:

3. Wir bestimmen nun eine Jordanbasis. Dabei gehen wir für jeden Eigenwert λ_j wie folgt *separat* vor:

   (a) Wähle den größten verbleibenden Block zu λ_j (Sei r die Größe des Blocks).

   (b) Wir wählen $v_r \in \ker(A - \lambda_j)^r \setminus \ker(A - \lambda_j)^{r-1}$ so, dass er linear unabhängig von der Vereinigung aller bisher gewählten Jordanbasisvektoren und aller Vektoren aus $\ker(A - \lambda_j)^{r-1}$ ist.

   (c) Wir berechnen die anderen Basisvektoren dieses Blocks durch

   $$v_{r-1} = (A - \lambda_j)v_r, \dots, v_1 = (A - \lambda_j)v_2$$

   (d) Sind alle Blöcke dieses Eigenwerts behandelt, können wir zum nächsten Eigenwert übergehen. Ansonsten gehen wir zurück zu Schritt 3a

4. Wir ordnen die Vektoren nach der gewünschten JNF an, das heißt wir bilden eine Matrix

   $$S := (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s, \dots, w_1, \dots, w_t)$$

   für die gilt

   $$S^{-1}AS = J$$

   mit einer JNF in der der Block, der zu $v_1, \dots, v_r$ gehört an erster Stelle, der zu $u_1, \dots, u_s$ gehörige Block an zweiter Stelle usw. steht.

Wir wollen noch ein Beispiel vorrechnen: In der Praxis sind schöne Beispiele nicht so einfach zu finden - den Algorithmus zur Bestimmung der Blöcke braucht man frühestens bei 4×4-Matrizen. Wollen wir also ein Beispiel, wo der Algorithmus notwendig ist, mit zwei Eigenwerten, dann bräuchten wir bereits eine 8×8-Matrix. Deswegen werden wir hier ein einfacheres Beispiel mit nur einem Eigenwert betrachten:

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir gehen den Algorithmus Schritt für Schritt durch, wobei wir Rechnungen nur stark verkürzt wiedergeben:

1. Wir bestimmen zuerst das charakteristische Polynom und die Eigenwerte. Es gilt

$$\chi_A = \det(\lambda - A) = \ldots = (\lambda - 2)^4$$

also haben wir lediglich den Eigenwert 2 mit algebraischer Vielfachheit 4.

2. Wir bestimmen nun die Kerne und ihre Dimensionen. Dazu lösen wir das Gleichungssystem

$$(A - 2)x = 0$$

und erhalten für x:

$$\ker(A - 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Wir nennen den ersten Vektor w_1 und den zweiten w_2.
Insbesondere sehen wir, dass die Dimension des Kerns 2 ist und können hier schon direkt sehen, dass die JNF zwei Blöcke hat. Wir müssen also den Algorithmus weiter fortführen um zu bestimmen, ob wir einen Block der Größe 3 und einen Block der Größe 1 haben, oder ob wir zwei Blöcke der Größe 2 haben. Dazu bestimmen wir als nächstes

$$(A - 2)^2 = 0$$

und daraus folgt direkt $\ker(A - 2)^2 = \mathbb{R}^4$.[a] Wir sehen damit auch, dass die Größe des größten Jordanblocks 2 ist. Und daraus können wir direkt ablesen, dass wir zwei Blöcke der Größe 2 haben.
Der Vollständigkeit halber wollen wir dennoch oben erwähnte Formeln anwenden und bestimmen:

$$|\{\text{Blöcke der Größe } 2\}| = \dim \ker(A - 2)^2 - \dim \ker(A - 2) = 4 - 2 = 2$$
$$|\{\text{Blöcke der Größe } 1\}| = \dim \ker(A - 2)^2 - |\{\text{Blöcke der Größe } 2\}| = 2 - 2 = 0$$

Die JNF lautet also:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Wir wollen in diesem Fall neben der JNF auch noch eine Jordanbasis bestimmen. Wir haben nur einen einzelnen Eigenwert und dieser hat zwei Blöcke der Größe 2, also ist es hier egal, mit welchem Block wir anfangen.
   Wir wählen für den ersten Block eine Basis v_1, v_2. Da es noch keine bisher gewählten Basisvektoren gibt, können wir einfach

   $$v_2 \in \ker(A-2)^2 \setminus \ker(A-2)$$

   wählen, z.B. also

   $$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Wir bestimmen den zweiten Vektor als

   $$v_1 = (A-2)v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   und sind mit dem ersten Block fertig. Wir bestimmen nun die Basis aus u_1, u_2 des zweiten Blocks. Dazu wählen wir einen Vektor $u_2 \in \ker(A-2)^2 \setminus \ker(A-2)$ der außerhalb des Spanns aller bisher gewählten Vektoren und aller Vektoren aus $\ker(A-2)$ liegt. Damit gilt $u_2 \notin \langle w_1, w_2, v_2 \rangle$[b], beispielsweise also

   $$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   und dann bestimmen wir

   $$u_1 = (A-2)u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   womit auch die Basis des zweiten Blocks bestimmt wäre.

4. Zuletzt ordnen wir die Basisvektoren noch wie gewünscht an. In diesem Fall haben wir keine relevante Wahlfreiheit, da beide Blöcke gleich sind. Wir wählen beispielsweise

   $$S = (u_1|u_2|v_1|v_2)$$

dann gilt

$$S^{-1}AS = J$$

[a] Hätten wir hier mehrere Eigenwerte, dann würden wir nicht stoppen, wenn $(A-2)^k = 0$ gilt, sondern wenn $\dim\ker(A-2)^k = \alpha_2$, also die algebraische Vielfachheit von 2 wäre.

[b] Wir sollten den Vektor ja unabhängig von allen bisher gewählten Vektoren wählen, wieso steht hier also kein v_1? Das liegt daran, dass $v_1 \in \ker(A-2) = \langle w_1, w_2 \rangle$ liegt, also eh in diesem Spann.

Ein Fehler, der einem sehr einfach unterläuft ist dabei folgender:

Sei A wie im obigen Beispiel. Wir nehmen an, dass wir die Schritte 1 und 2 bereits abgeschlossen haben und auch, wie im obigen Beispiel v_1, v_2 bestimmt haben. Wir wollen nun die Basis des zweiten Blocks, also u_1, u_2 bestimmen. Dazu wählen wir als erstes den Vektor $u_2 \in \ker(A-2)^2 \setminus \ker(A-2)$, sodass er von allen bisher gewählten Vektoren unabhängig sei und nicht im Spann der Vektoren aus $\ker(A-2)$ liegt. Wählen wir beispielsweise

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

offenbar sind u_2 und v_2 linear unabhängig. Und es gilt auch $u_2 \notin \langle w_1, w_2 \rangle$. Allerdings gilt

$$u_1 = (A-2)u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = v_1$$

und das ist ein Widerspruch, da eine Basis keine linear abhängigen Vektoren enthalten darf. Wo liegt der Fehler?
Wir hatten u_2 zwar von allen bisher gewählten Vektoren und von allen Vektoren aus dem Kern separat linear unabhängig gewählt, aber nicht aus der Vereinigung. Es gilt

$$u_2 = e_3 = -2w_1 + 2w_2 + v_2$$

also gilt $u_2 \in \langle w_1, w_2, v_2 \rangle$ und das hatten wir ausgeschlossen.

1. Wir wollen die JNF von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Dazu berechnen wir als erstes das charakteristische Polynom. Da $(\lambda - A)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, sehen wir direkt $\chi_A = \lambda^3$, also ist 0 der einzige Eigenwert mit einer algebraischen Vielfachheit von 3. Wir sehen direkt, dass $\dim\ker(A) = 1$, also gibt es nur einen Jordanblock. Die Normalform ist also

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als nächstes suchen wir eine Basis. Wir bestimmen zuerst $\ker(A)^2$. Es gilt

$$\ker(A)^2 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

und $\ker(A)^3 = 0$ folgt direkt, da 3 die algebraische Vielfachheit von 0 ist. Wir wählen also $v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \langle e_1, e_2 \rangle$, beispielsweise $v_3 = e_3$. Dann bestimmen wir:

$$v_2 = Av_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und wir schreiben die Jordanbasis als Transformationsmatrix:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Wir berechnen die JNF von

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und beginnen mit der Berechnung des charakteristischen Polynoms. Da $(\lambda - B)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, können wir direkt ablesen, dass

$$\chi_B = (\lambda - 2)^2 \lambda$$

gilt. Das heißt wir haben $\lambda_1 = 0$ mit einer algebraischen Vielfachheit von 1 und $\lambda_2 = 2$ mit einer algebraischen Vielfachheit von 2. Wir wollen nun die Größen der Blöcke bestimmen. In diesem Fall stellt sich nur die Frage, ob wir einen Block oder zwei Blöcke für λ_2 haben. Wir bestimmen das diesmal mit dem Minimalpolynom - denn der Exponent eines Linearfaktors im Minimalpolynom gibt die Größe des größten zu diesem Linearfaktor gehörigen Blocks an. Es gilt

$$(B - 2)B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

also kann $(X - 2)X$ nicht das Minimalpolynom von B sein. Da das Minimalpolynom aber ein Teiler des charakteristischen Polynoms ist, folgt damit direkt, dass $(X - 2)^2 X$ das Minimalpolynom sein muss und wir sehen, dass wir einen einzelnen Block der Größe 2 zum Eigenwert λ_2 haben.
Wir bestimmen nun noch die Jordanbasis. Zuerst zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$. Es gilt:

$$\ker(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

also wählen wir diesen erzeugenden Vektor als ersten Basisvektor u_1. Für $\lambda_2 = 2$ haben wir einen Block der Größe 2. Den ersten Basisvektor wählen wir als $v_2 \in \ker(B - 2)^2 \setminus \ker(B - 2)$.

Es gilt
$$\ker(B-2)^2 = \langle e_1, e_2\rangle, \quad \ker(B-2) = \langle e_1\rangle$$
wir können also beispielsweise $v_2 = e_2$ wählen. Dann bestimmen wir
$$v_1 = (B-2)v_2 = e_1$$
und haben alle Vektoren der Jordanbasis gefunden.
Wir wollen hier auch noch die Transformationsmatrix S für $S^{-1}AS = J$ aufstellen. Es gibt hier nun zwei mögliche Anordnungen der Vektoren, beide sind gleich richtig. Wählen wir
$$S = (u_1|v_1|v_2)$$
so erhalten wir
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
und wählen wir
$$S = (v_1|v_2|u_1)$$
erhalten wir
$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein 4-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus.

1. Bestimme alle möglichen JNFs von f.
2. Liste alle möglichen Folgen von Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume auf und erkläre, wie sie mit den möglichen JNFs zusammenhängen.

Lösung:

1. Wir wissen, dass f eine nilpotente Abbildung ist, also gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ sodass $f^k = 0$ gilt. Wir wählen dieses k minimal, dann gilt $\mu_f = X^k$. Das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom eines Endomorphismus haben die gleichen Nullstellen, das heißt wir wissen bereits, dass 0 der einzige Eigenwert von f ist. Gleichzeitig wissen wir, dass der Exponent eines Linearfaktors $(X-\lambda)$ in $\mu_f(X)$ die Größe des größten Jordanblocks zum Wert λ angibt. Mit diesen Informationen können wir folgende Jordannormalformen erhalten:
   (a) Sei $\mu_f = X$, dann hat der größte Block Dimension 1. Das heißt für unsere JNF ist $J = 0$ die einzige Option.
   (b) Sei $\mu_f = X^2$, dann hat der größte Block Dimension 2. Wir haben keine weiteren Infor-

mationen über die anderen Blöcke, also gibt es zwei Möglichkeiten:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für J_1 haben wir zwei Blöcke der Größe 2, für J_2 haben wir einen Block der Größe 2 und zwei Blöcke der Größe 1.

(c) Sei $\mu_f = X^3$, dann hat der größe Block Dimension 3. Damit bleibt nur eine weitere Dimension über, also müssen wir einen Block der Größe 1 haben. Es gilt also

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Sei $\mu_f = X^4$, dann hat der größe Block Dimension 4. Dieser nimmt dann bereits die gesamte Größe der Matrix ein, also haben wir nur diesen einen Block. Es gilt also

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Wir werden die Folgen von Dimensionen hier auf folgende Art und Weise schreiben:

$$(\dim\ker(A-\lambda), \dim\ker(A-\lambda)^2, \dots, \dim\ker(A-\lambda)^k)$$

wobei gilt, dass $\dim\ker(A-\lambda)^{k-1} \neq \dim\ker(A-\lambda)^k = \dim\ker(A-\lambda)^{k+1}$.

Es gibt hierbei zwei Dinge zu beachten:
Die Dimensionen der Kerne können jeweils nur aufsteigen, das heißt $\dim\ker(A-\lambda)^k < \dim\ker(A-\lambda)^{k+1}$, außer $\dim\ker(A-\lambda)^k = \alpha$, wobei α die algebraische Vielfachheit von λ sei. In unserem Fall wissen wir, dass $\chi_f = X^4$, also ist die algebraische Vielfachheit 4 und wir müssen alle Sequenzen beachten, die in 4 enden.
Außerdem gilt (siehe dazu auch die Erläuterung des Algorithmus), dass jeder Jordanblock, der zur Dimension des Kerns von $(A-\lambda)^k$ beiträgt auch zur Dimension aller Kerne von $(A-\lambda)^{k-l}$ für $l > 0$ beiträgt. Das heißt, dass die Zuwächse in der Dimension nur kleiner werden können, aber nicht größer. Beispielsweise wäre eine Sequenz

$$(1, 2, 4)$$

nicht möglich: Die erste Zahl gibt uns die Anzahl aller Jordanblöcke an, in diesem Fall also genau ein Block. Die Differenz zwischen der letzten und der zweiten Zahl ist 2, das heißt allerdings, dass wir zwei Blöcke der Größe 3 hätten. Das kann offensichtlich nicht richtig sein.
Mit diesen beiden Regeln bestimmen wir nun die möglichen Folgen und schreiben, welche JNFs dazu gehören.

(a) Sind die Dimensionen $(1, 2, 3, 4)$, dann haben wir genau einen Block der Größe 4.

(b) Sind die Dimensionen $(2, 3, 4)$, dann haben wir einen Block der Größe 1 und einen Block der Größe 3.

(c) Sind die Dimensionen $(2, 4)$, dann haben wir zwei Blöcke der Größe 2.

(d) Sind die Dimensionen $(3, 4)$, dann haben wir zwei Blöcke der Größe 1 und einen Block der Größe 2.

(e) Sind die Dimensionen (4), dann haben wir vier Blöcke der Größe 1.

Aufgabe 3
Bestimme die Jordansche Normalform und eine Jordanbasis von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & -6 & -6 \\ -5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Man kann diese Aufgabe mit dem normalen Algorithmus lösen. Wir wählen allerdings eine schnellere Variante:

Wir sehen direkt, dass die zweite und dritte Spalte der Matrix linear abhängig sind. Das heißt die Matrix hat keinen vollen Rang, also gibt es insbesondere Vektoren, die auf 0 abgebildet werden, also muss 0 ein Eigenwert der Matrix sein. Wir wollen nun wissen, wie viele Blöcke welcher Größen es zum Eigenwert 0 gibt. Dafür bestimmen wir die Folge der Dimensionen der verallgemeinerten Eigenräume, bis sie stagniert - dann haben wir alle Jordanblöcke bestimmt. Es gilt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim\ker(A)^2 = 3$$

$$A^3 = 0 \Rightarrow \dim\ker(A)^3 = 4$$

Da $A^3 = 0$ gilt, wissen wir bereits, dass A nilpotent ist und $\mu_A(X) = X^3$ gilt. Wir können nun entweder Aufgabe 2a verwenden, die uns sagt, dass ein nilpotenter Endormorphismus mit Minimalpolynom X^3 eine JNF mit einem Block der Größe 3 und einen Block der Größe 1 hat, oder wir verwenden Aufgabe 2b, aus der wir ablesen, dass die einzig gültige Folge von Dimensionen $(2, 3, 4)$ ist - womit wir ebenfalls je einen Block der Größen 3 und 1 haben.[a] Die JNF ist also

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir suchen nun noch eine geeignete Basis. Wir bestimmen

$$\ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \ker(A^2) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\rangle$$

Zuerst bestimmen wir die Vektoren, die zum Block der Größe 3 gehören. Dafür wählen wir $v_3 \in \ker(A^3) \setminus \ker(A^2)$, beispielsweise also $v_3 = e_1$ und bestimmen

$$v_2 = Av_3 = \begin{pmatrix}1\\9\\-5\\3\end{pmatrix}, \quad v_1 = Av_2 = \begin{pmatrix}-2\\-6\\2\\-2\end{pmatrix}$$

und dann die Vektoren, die zum Block der Größe 1 gehören. Dafür wählen wir ein $u_1 \in \ker(A)$, das von v_1, v_2, v_3 linear unabhängig ist. Beispielsweise also

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

und wir erhalten als Jordanbasis (in eine Transformationsmatrix geschrieben):

$$S = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 9 & 0\\ 0 & 2 & -5 & 0\\ 1 & -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

[a] Da wir in dieser Aufgabe eh eine Jordanbasis bestimmen wollen und für diese explizit die Kerne von A und A^2 bestimmen müssen, kann man auch zuerst die Kerne bestimmen und daraus die Anzahl der jeweiligen Jordanblöcke direkt ablesen. Der Bezug auf Aufgabe 2 ist also in diesem Fall nicht wirklich eine Zeitersparnis - wollten wir aber nur die JNF selbst bestimmen, könnten wir uns ersparen, die Kerne explizit zu bestimmen.

Aufgabe 4

Sei $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ mit $\mathsf{tr}(A) = 3, \mathsf{rk}(A) = 4$ und $A^2(A^2 - \mathbb{1}_6) = 0$. Finde die JNF von A.

Lösung:

In dieser Aufgabe hilft uns der Algorithmus leider nichts, wir müssen auf eine ganz andere Art und Weise vorgehen. Zuerst bestimmen wir das Minimalpolynom und die Eigenwerte von A. Sei $P(X) = X^2(X^2 - 1)$, dann gilt $P(A) = 0$, also gilt $\mu_A | P$. Wir zerlegen:

$$P = X^2(X^2 - 1) = X^2(X + 1)(X - 1)$$

also hat P die Nullstellen $0, 1, -1$. Für μ_A sind damit auch nur die Nullstellen $0, 1, -1$ möglich. Aber: P ist nicht notwendigerweise das charakteristische Polynom, das heißt nicht jede Nullstelle von P muss tatsächlich auch Nullstelle von μ_A sein. Wir überlegen uns nun, welche Kombinationen von Eigenwerten für A tatsächlich möglich sind anhand zweier Aussagen:

1. Es gilt $\mathsf{tr}(A) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot \lambda_j$, wobei λ_j die Eigenwerte und α_j die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte sind. In unserem Fall gilt also, dass

$$\alpha_0 \cdot 0 + \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_{-1} \cdot (-1) = 3$$

gelten muss. Und da wir eine 6×6-Matrix betrachten, muss $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_{-1} = 6$ gelten. Damit ergeben sich als Lösungen nur

$$\alpha_0 = 3, \alpha_1 = 3, \alpha_{-1} = 0$$
$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 4, \alpha_{-1} = 1$$

2. Es gilt $\mathsf{rk}(J) = \mathsf{rk}(A) = 4$, also müssen in der JNF genau zwei Nullspalten enthalten sein.

Zusammen sehen wir, dass $\alpha_0 = 3, \alpha_1 = 3, \alpha_{-1} = 0$ die einzige Möglichkeit ist, da im anderen Fall $\mathsf{rk}(A) = 5$ gelten müsste. Das heißt -1 ist tatsächlich kein Eigenwert von A und 1 und 0 kommen jeweils mit einer Vielfachheit von 3 vor.
Wir wollen nun noch die Größen der Blöcke bestimmen. Da $\mu_A | X^2(X+1)(X-1)$ ist die Vielfachheit von $(X-1)$ in μ_A höchstens 1, also hat der größte Block zum Eigenwert 1 die Größe 1. Das heißt es gibt drei Blöcke der Größe 1 zum Eigenwert 1.
Auf der anderen Seite gilt $\mathsf{rk}(A) = 4$, also $\dim\ker(A) = 2$, das heißt wir haben zwei Blöcke zum Eigenwert 0. Es gibt also nur die Möglichkeiten einen Block der Größe 2 und einen Block der Größe 1 zu haben. Unsere JNF lautet dann

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$